

ANALYTISKA FUNKTIONER

DEMONSTRATIONSUPPGIFTER TILL DEN 12.11.2009

1. Undersök följande komplexa serier med avseende på konvergens och absolut konvergens:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2i}\right)^n.$$

2. Bestäm för $0 < r < 1$ summan av de reella serierna

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta.$$

(Ledning: Betrakta den geometriska serien med $z = r e^{i\theta}$, $0 < |z| < 1$.)

3. Antag att den komplexa serien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ är konvergent. Visa att då är potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ absolut konvergent för } |z| < 1.$$

4. Antag att $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ är en potensserie med konvergensradien $R > 0$. Visa att om gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ existerar, så gäller $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$.

5. Bestäm konvergensradien för potensserierna

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{2^{2n}}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2 + (-1)^n} \right)^n.$$